TD 3 : la valeur actuelle nette

Basile Dubois

October 13, 2020

1 Exercice 1 : VAN

1.1 Valeur Actuelle, Valeur Future

1. Un projet a une valeur actuelle de 13200. Sachant que le taux d'actualisation est de 4%, quelle est sa valeur future dans 3 ans ? Dans 6 ans ? Dans 9 ans ?
   En utilisant la formule de la valeur future, on a

   $$\text{Valeur Future de l'investissement} = \text{Investissement} \times (1+r)^n$$

   Soit, pour une durée de 3 ans et un taux d'actualisation r de 4%,

   $$\text{VF}(3) = 13200 \times (1,04)^3 = 14848$$

   Pareillement, on a

   $$\text{VF}(6) = 13200 \times (1,04)^6 = 16702\text{VF}(9) \qquad = 13200 \times (1,04)^9 = 18787$$

2. Un projet a une valeur future de 17000 dans 6 ans. Sachant que le taux d'actualisation est de 7%, quelle est sa valeur actuelle ?
   On cherche ici à déterminer la valeur actuelle du projet à partir de sa valeur future. Là aussi, il nous faut appliquer la formule du cours

   $$\text{Valeur Actuelle} = \frac{\text{Valeur Future après } n \text{ périodes}}{(1+r)^n}$$

   Ce qui nous donne, pour $n = 6$, $r = 0,07$ et $VF(6) = 17000$:

   $$\text{Valeur Actuelle} = \frac{17000}{(1,07)^6} = 11328$$

1.2 Flux de trésorerie multiples

Considérez le projet suivant :

Période	Flux de trésorerie
1	(10 000)
4	5000
7	9000

1. Quelle est la VAN du projet lorsque le taux d'actualisation r est de 5% ? Quelle est sa valeur Future ?
   Pour calculer la VAN d'un projet à flux de trésorerie multiples, il nous faut simplement additionner les flux actualisés. En l'occurence,
   $$\text{VAN} = -\frac{10000}{(1,05)^1} + \frac{5000}{(1,05)^4} + \frac{9000}{(1,05)^7} = 985$$
   On peut calculer sa valeur future à partir de la VAN, en appliquant la formule de la valeur future à la VAN
   $$\text{VF}(7) = VAN \times 1,05^7 = 985 \times 1,05^7 = 1386$$
   On peut aussi tout à fait simplement additionner la valeur future des flux de trésorerie
   $$\text{VF}(7) = -10000 \times 1.05^6 + 5000 \times 1.05^3 + 9000 = 1387$$
   Vous remarquerez que le flux la période 1 reçoit 6 fois des intérêts composés puisqu'il y a 6 périodes entre la première et la septième période. Pareillement, les flux de la période 4 et 7 reçoivent respectivement 3 fois et 0 fois des intérêts.

2. Après analyse plus poussée du niveau de risque du projet, les analystes considèrent que le coût d'opportunité du capital est de 9% pour ce projet. Quelle est la nouvelle VAN du projet ? sa valeur Future ?
   On doit ici répéter ce que nous avons fait dans la question précédente, mais avec un taux d'actualisation qui est de 9%, puisque l'on utilise toujours le coût d'opportunité du capital comme taux d'actualisation lorsqu'il nous est connu.
   $$\text{VAN} = -\frac{10000}{(1,09)^1} + \frac{5000}{(1,09)^4} + \frac{9000}{(1,09)^7} = -709$$
   $$\text{VF}(7) = VAN \times 1,09^7 = -709 \times 1,09^7 = -1296$$
   Vous remarquerez que la VAN et la VF sont des critères équivalents. Si la VAN est positive, la VF le sera et vice-versa. En tant que critère de décision, cela signifie que vous ferez les mêmes investissements lorsque le critère est d'avoir une VAN/une VF positive.

1.3 Coûts irrécupérables

Considérez le projet suivant :

Période	Flux de trésorerie
1	(15 000)
4	10 000
8	17 000

La moitié des montants investis dans ce projet sont **irrécupérables**. Le taux d'actualisation r correspondant au projet est de 7%.

1. Le projet est il rentable ?
   Pour répondre à cette question, il nous faut calculer si la valeur actuelle nette des flux trésorerie est positive ou si la valeur future des flux de trésorerie est positive. La valeur future étant plus intuitive pour cet exercice, nous allons calculer la valeur future. Mais vous pouvez très bien répondre à ces questions avec la VAN !

   $$\text{VF}(8) = -15000 \times 1.07^7 + 10000 \times 1.07^4 + 17000 = 6021$$

   La valeur future étant supérieure à 0, le projet est rentable en l'état. A titre indicatif, cela correspond à une VAN de 3504.

2. Supposez maintenant qu'un évènement inattendu fait que l'on doit réinvestir 10 000 en période 5. Le profil des flux de trésorerie auquel fait face l'investisseur en période 5 est donc le suivant

Période	Flux de trésorerie
1	(15 000)
4	10 000
5	(10 000)
8	17 000

   Le projet est il globalement rentable ? Est ce qu'il faut malgré tout réinvestir ? N'oubliez pas les coûts irrécupérables ! Pour répondre à cette question vous devrez calculer la VAN ou la Valeur Future avec et sans coûts irrécupérables.
   Clairement, ce projet n'est plus rentable :

   $$\text{VF}(8) = -15000 \times 1.07^7 + 10000 \times 1.07^4 - 10000 \times 1.07^3 + 17000 = -6229$$

   Au début de la période 5, l'investisseur se retrouve désormais face à un choix : Il peut liquider le projet et récupérer la moitié de ses coûts initiaux, ou il peut réinvestir 10 000 en période 5. Comme nous l'avons développé dans le cours, cela signifie que lorsqu'il évalue la valeur (actuelle ou future) du projet, l'investisseur doit ignorer les coûts irrécupérables. La question que doit se poser l'investisseur est "Est ce qu'il est aujourd'hui rentable de réinvestir ?".
   Lorsque l'on ignore les coûts irrécupérables, on ignore ces coûts pour les flux de trésorerie du passé. Au début de la période 5, il faut donc ignorer les coûts irrécupérables de la période 0 à 4, en l'occurence ceux de la période 1. Sachant que l'énoncé nous dit que 50% des coûts sont irrécupérables,

   $$\text{VF}(8) = -7500 \times 1.07^7 + 10000 \times 1.07^4 - 10000 \times 1.07^3 + 17000 = 5814$$

   Il est donc aujourd'hui rentable de réinvestir dans le projet !

2 Annuité, perpétuité

2.1 Perpétuité

1. Supposez que je souhaite créer une bourse d'étude en mon nom à TSM, d'un montant de 30 000 euros par an. Les taux directeurs étant très bas, le rendement sans risque maximal que je puisse obtenir est de 1%. Combien d'argent dois-je placer pour pouvoir financer cette bourse ?
   En utilisant la formule du cours, on a

   $$\text{Valeur Actuelle d'une perpétuité} = \frac{CF}{r}$$

   La valeur actuelle d'une perpétuité étant l'équivalent monétaire qui produirait de tels rendements au taux d'intérêt en question. Ainsi, il est clair que pour produire un flux de trésorerie annuel de 30000 euros,

   $$\text{Valeur actuelle de la perpétuité} = \text{Montant du placement} = \frac{30000}{0,01} = 3000000$$

   Je dois placer 3 000 000 d'euros pour financer cette bourse.

2. En plaçant mon argent dans l'immobilier, je peux obtenir un rendement de 5%, avec un niveau de risque très faible. Dans ce cas, combien d'argent dois-je placer pour financer ma perpétuité de 30 000 euros ?
   Là encore,

   $$\text{Montant du placement} = \frac{30000}{0,05} = 600000$$

2.2 Annuité

Supposez qu'un couple acquière un appartement pour un montant de 1 000 000 d'euros. La banque lui propose de financer son crédit immobilier en annuités. Le taux d'intérêt pour un crédit de 20 ans est de $1,5\%$ annuel. Quel est le montant de l'annuité ? Déduisez en le montant des mensualités.

On cherche ici à déterminer le montant annuel des paiements, que l'on appelle montant de l'annuité. Pour cela, on connaît la valeur actuelle nette totale de l'annuité (c'est le montant du prêt, soit 1 000 000 d'euros), le taux d'intérêt ($r = 0,015$), et la durée du crédit ($n = 20$). En d'autre termes, on souhaite connaître le montant annuel des paiements qui permette à la banque d'être indifférente entre recevoir ces montants durant toute la durée du crédit et détenir 1 000 000 d'euros aujourd'hui. On cherche le montant annuel des paiements tel que leur VAN totale soit de 1 000 000 d'euros.
La formule du cours est la suivante :

$$\text{Valeur Actuelle d'une annuité} = CF[\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^n}]$$

On a ici 20 périodes, rémunérées au taux de 1,5%. Puisqu'on cherche à déterminer le montant annuel des paiements, soit le Cash Flow périodique dans la formule, on a

$$CF = \frac{\text{Valeur Actuelle de l'annuité}}{[\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^n}]} = \frac{1000000}{[\frac{1}{0{,}015} - \frac{1}{0{,}015\times(1{,}015)^20}]} = 58246$$

Pour connaître le montant des mensualités, il nous faut diviser par 12. On obtient

$$58246/12 = 4854$$

A titre indicatif, cela représente un total de 1 164 915 euros. L'emprunt a donc un "coût" de 164 915 euros pour le ménage.

Supposez maintenant que les taux remontent et que le taux d'intérêt pour un crédit de 20 ans passe à 5%. Quel est le nouveau montant de l'annuité ? Des mensualités ? Si l'on souhaite préserver le montant initial de l'annuité, quel montant peut-on désormais emprunter ?

Le calcul est désormais le suivant :

$$CF = \frac{\text{Valeur Actuelle de l'annuité}}{[\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^n}]} = \frac{1000000}{[\frac{1}{0{,}05} - \frac{1}{0{,}05\times(1{,}05)^20}]} = 80242$$

Le nouveau montant des mensualités est de 6686 par mois. Cela représente un total de 1 604 840 euros. Le "coût" de l'emprunt est donc désormais de 604 840 euros, soit quasiment un quadruplement.
Supposons maintenant que la capacité d'emprunt du ménage soit au maximum de 58 246 euros par mois (soit le montant initial des annuités). Le ménage cherche donc à connaître le montant maximal qu'il est capable d'emprunter étant donné le taux d'intérêt. Cela nous est donné par la formule du cours.

$$\text{Valeur Actuelle d'une annuité} = CF[\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^n}]$$

$$\text{Montant maximum de l'emprunt} = 58246 \times [\frac{1}{0,05} - \frac{1}{0,05 \times (1,05)^20}] = 725872$$

Le ménage ne peut désormais emprunter que 725 872 euros étant donné ses capacités de remboursement. Il n'est donc pas étonnant que les prix de l'immobilier varient avec les taux d'intérêt.

3 Inflation

Considérez à nouveau le projet de l'exercice 1 :

Période	Flux de trésorerie
1	(10 000)
4	5000
7	9000

Le **taux d'actualisation** r est de 5%, et le **taux d'inflation** i est de 3%.

1. Calculez la valeur future **des flux de trésorerie**, leur valeur réelle, leur valeur future réelle.

Période	Flux de trésorerie	Valeur Future	Valeur Réelle	Valeur Future Réelle
1	(10 000)	(13401)	(9708)	(10895)
4	5000	5788	4442	4705
7	9000	9000	7317	7317

On calcule la valeur future d'un flux de trésorerie en calculant l'intérêt composé qu'il acquière jusqu'à l'horizon d'investissement. Ainsi, un flux de trésorerie en période 4 pourra acquérir des intérêts composés 3 fois si l'horizon d'investissement est la 7ème période. Donc, pour un cashflow en période t et un horizon d'investissement n,

$$VF(n) = CF \times (1 + r)^{n-t}$$

On calcule la valeur réelle en divisant par l'inflation, puisque la valeur de l'argent diminue d'autant que les prix ont augmenté. La valeur réelle d'un flux à la période t est donc

$$VR(t) = \frac{CF}{(1 + i)^t}$$

On peut donc calculer la valeur future réelle de deux façons :
Puisque ces montants représentent la valeur future des flux en période 7, on doit considérer l'inflation après 7 périodes pour connaître leur valeur réelle. Ainsi, si VF(n) représente la valeur future d'un flux de trésorerie en période n,

$$VFR(n) = \frac{VF(n)}{(1 + i)^n}$$

Autrement, on peut utiliser le taux d'intérêt réel pour actualiser les flux de trésorerie réels. Ces deux méthodes sont équivalentes. Ainsi, pour un flux de trésorerie à la période t,

$$VFR(n) = VR(t) \times (1 + \rho)^{n-t} = VR(t) \times (\frac{1 + r}{1 + i})^{n-t}$$

2. Ensuite, calculez la valeur future et la valeur future réelle **du projet**. Quelle est la valeur actuelle nette réelle du projet ?
La valeur future du projet est de 1387, sa valeur future réelle est de 1127, et sa valeur actuelle nette est de 985. La valeur actuelle nette est la même qu'elle soit calculée à partir de la VFR (et donc en utilisant le taux d'intérêt réel ρ) ou à partir de la VF (en utilisant r).